

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY.
DES TELECOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option T.A.)
CONCOURS D'ADMISSION 1992
MTHÉMATIQUES
DEUXIÈME ÉPREUVE
OPTION M
(Durée de l'épreuve : 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II-M.

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de l'option M, comporte 4 pages.

NOTATIONS ET OBJECTIFS

n désigne un entier supérieur strictement à 1 et E l'ensemble des matrices carrées (n, n) à termes réels, tA est la matrice transposée de A .

Les vecteurs $x, y, \dots$ de $\mathbb{R}^n$ seront désignés aussi par des matrices colonnes $X, Y, \dots$, $\mathbb{R}^n$ sera muni du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ défini par : $(x|y) = (X|Y) = {}^tXY$.

La norme d'un vecteur X de $\mathbb{R}^n$ sera notée $|X|$. L'espace vectoriel E sera muni du produit scalaire $((\cdot|\cdot))$ défini par : $((A|B)) = \text{tr}({}^tAB)$. Le couple $(E, ((\cdot|\cdot)))$ est un espace euclidien. La norme d'une matrice A sera notée $\|A\|$.

(Rappel : la trace du produit AB est égale à la trace de BA lorsque les produits AB et BA sont des matrices carrées.)

Le but du problème est de montrer que pour une matrice M donnée, il est possible de trouver une matrice P de rang inférieur à celui de M , telle que la distance de M à P soit la plus petite possible.

PREMIÈRE PARTIE

Étude des matrices de rang 1

I-1 Factorisation des matrices de rang 1

- a) Soit m un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que m est de rang 1 si, et seulement si, s'il existe un vecteur a de $\mathbb{R}^n$ et une forme linéaire u définie sur $\mathbb{R}^n$, non nuls, tels que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$, $m(x) = u(x)a$.

Déterminer la matrice M associée à cet endomorphisme m dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE : Expliciter M lorsque $a = e_i$ et $u = e_j^*$ ($(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ est la base duale associée.)

- b) En déduire l'expression générale d'une matrice M de rang 1 à l'aide du produit d'une matrice colonne X et d'une matrice ligne tY .
- c) Établir les relations qui lient les matrices colonnes X, X' et Y, Y' lorsqu'une même matrice M de rang 1 est égale aux produits X^tY et X'^tY' .

I-2 Rang d'une famille de matrices de rang 1

- Démontrer que toute matrice M est égale à une somme de matrices de rang 1.
- Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ et $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ deux bases de $\mathbb{R}^n$, démontrer que la suite des matrices $(X_i^t Y_j)_{(1 \leq i, j \leq n)}$ est une base de E .
- Soient deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ $(U_1, U_2, \dots, U_p)$ et $(V_1, V_2, \dots, V_q)$ de rang r et s . Déterminer le rang de la famille des matrices $(U_i^t V_j)_{(1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)}$ considérées comme vecteurs de E .

I-3 Orthogonalité de matrices de rang 1 dans $(E, ((\cdot|\cdot)))$

- A quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathbb{R}^n$, les matrices $X^t Y$ et $X'^t Y'$ sont-elles orthogonales dans $(E, ((\cdot|\cdot)))$?
- En déduire comment choisir deux suites $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, pour que la suite des matrices $(X_i^t Y_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ soit orthonormée dans $(E, ((\cdot|\cdot)))$.

I-3 Matrices diagonalisables de rang 1 Soit A une matrice de rang 1 définie par $A = X^t Y$, soit α le réel ${}^t X Y$.

- Démontrer que la matrice A annule un polynôme de degré 2. En déduire les valeurs propres possibles de A .
- Pour quelles valeurs du réel α la matrice A est-elle diagonalisable ?
- EXEMPLE : Considérer le cas suivant :

$$n = 3, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \text{ est un réel.}$$

Discuter la diagonalisation de $A = X^t Y$ suivant les valeurs de α .

- Démontrer que les matrices diagonalisables de rang 1 engendrent E .

DEUXIÈME PARTIE

Étude d'un endomorphisme

Soient A, B deux matrices de E , soit $\Phi_{A,B}$ l'endomorphisme de E défini par la relation :

$$\Phi_{A,B}(M) = AM^t B$$

Cette partie a pour but d'établir des propriétés de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$.

II-1 Rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$

Déterminer en fonction des rang r et s des matrices A et B , le rang de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$.

II-2 Vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$

- Démontrer que si V et W sont des vecteurs propres des matrices A et B , la matrice $V^t W$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$.
- Caractériser les matrices de rang 1 qui appartiennent au noyau de $\Phi_{A,B}$.
- Soit $X^t Y$ un matrice de rang 1 vecteur propre associé à la valeur propre μ , différente de zéro, de $\Phi_{A,B}$. Est-ce que X et Y sont des vecteurs propres de A et B ?
- Démontrer que si A et B sont diagonalisables, l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est aussi diagonalisable. Calculer alors la trace de $\Phi_{A,B}$.

e) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, dans le cas suivant :

$$n = 2, \quad A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

II-3 Propriétés d'orthogonalité de $\Phi_{A,B}$

- a) L'endomorphisme $\phi_{A,B}$ est supposé orthogonal dans $(E, ((\cdot|\cdot)))$, c'est-à-dire pour toutes matrices M et N de E , $((\phi_{A,B}(M)|\phi_{A,B}(N))) = ((M|N))$.
En choisissant pour M et N deux matrices égales de rang 1, établir qu'il y a une relation simple, pour tout couple de vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$, entre $|AX|^2 \cdot |BY|^2$ et $|X|^2 \cdot |Y|^2$.
- b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que l'endomorphisme $\phi_{A,B}$ soit diagonalisable dans $(E, ((\cdot|\cdot)))$.

TROISIÈME PARTIE

Expression d'une matrice M de rang r d'aide de matrices de rang 1.

Désignons par m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé dans la base canonique à une matrice M de rang r , et par m^* l'endomorphisme adjoint de m : pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$

$$(m^*(x)|y) = (x|m(y)).$$

III-1 Valeurs propres de l'endomorphisme $m^* \circ m$

Démontrer que le rang de l'endomorphisme composé $m^* \circ m$ est égal à r . Établir l'existence d'une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres (v_i) , $1 \leq i \leq n$ de $m^* \circ m$ telle que les valeurs propres α_i associées vérifient les relations :

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \alpha_r > 0 \text{ et si } r < n, \quad \alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = \alpha_n = 0.$$

III-2 a) Démontrer que les vecteurs $m(v_i)$ sont orthogonaux deux à deux. Calculer leurs normes.

- b) En déduire qu'il existe deux bases orthonormées de $\mathbb{R}^n$, (Y_i) , $1 \leq i \leq n$ et (Z_i) , $1 \leq i \leq n$ telles que :

$$M = \sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i} Y_i^t Z_i.$$

QUATRIÈME PARTIE

Approximation d'une matrice de rang r par une matrice de rang inférieur s dans $E, ((\cdot|\cdot))$.

La matrice M de rang r est donnée ainsi qu'un entier s vérifiant $s < r$, le but de cette partie est de déterminer une matrice P qui rende minimum la distance de M à l'ensemble R_s des matrices de rang inférieur ou égal à s . La distance de la matrice M à R_s est définie par la relation :

$$d(M, R_s) = \inf\{\|M - N\| / N \in R_s\}.$$

Il sera admis dans la suite que si N est une matrice de rang q , et M une matrice de rang r , la suite décroissante (γ_i) des valeurs propres de la matrice ${}^t(M - N)(M - N)$ vérifie pour i , $1 \leq i \leq n - q$, l'inégalité :

$$\gamma_i \geq \alpha_{i+q},$$

où α_i est la suite décroissante des valeurs propres de tMM .

IV-1 Résolution du problème d'approximation

Le rang r de la matrice M est supposé supérieur strictement à 1. Soit s un entier tel que $0 < s < r$.

a) Démontrer l'inégalité :

$$d(M, R_s) \leq (\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r)^{\frac{1}{2}},$$

les α_i sont les valeurs propres de la matrice tMM .

b) Soit N une matrice de R_s , comparer $\|M - N\|^2$ et $\alpha_{s+1} + \dots + \alpha_r$.

c) En déduire la valeur de $d(M, R_s)$. Existe-t-il une matrice P de R_s telle que $\|M - P\| = d(M, R_s)$?

d) Est-ce que R_s est un sous-ensemble fermé de E ?

IV-2 Approximation par une matrice symétrique

Soit s un entier, $1 \leq s \leq n$; soit S_s , l'ensemble des matrices symétriques de rang inférieur ou égal à s . Soient A et B deux matrices respectivement symétrique et antisymétrique.

a) Que vaut $((A|B))$?

b) Démontrer qu'il existe une matrice symétrique U appartenant à S_s , approchant A au plus près.

Évaluer $\|A - U\|$ à l'aide des valeurs propres λ_i de A ($|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$). A quelle condition y-a-t-il unicité de la matrice U ?

c) Soit M une matrice de E , $M = A + B$ avec $A = {}^tA$, $B = -{}^tB$. Démontrer qu'il existe une unique matrice symétrique V appartenant à S_s , approchant M au plus près. La caractériser et donner la valeur de $d(M, S_s)$.

FIN DU PROBLÈME